ORGANIZATORZY KONKURSU
Liceum Ogólnokształcące Nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu
Dolnośląskie Stowarzyszenie Na Rzecz Uzdolnionych
al. Brücknera 10, 51 – 410 WROCŁAW,
tel. + 48 71 324 69 25, + 48 71 324 69 00, fax. + 48 71 324 69 01

HONOROWY PATRONAT:
Dolnośląski Kurator Oświaty
Wiceprezydent Miasta Wrocławia

KONKURS **LIGA NAUKOWA**
Dolnośląski Konkurs Gimnazjalistów o Puchar Prezydenta Wrocławia

FINAŁ MATEMATYCZNY

rozwiązania zadań

20 lutego 2007, godz. 13:00,
część konkursu rozgrywana w siedzibie Liceum Ogólnokształcącego Nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

zadania otwarte

IMIONA I NAZWISKA CZŁONKÓW DRUŻYNY (czterech), na pierwszym miejscu Kapitan Drużyny:

1. ………………………………………………………………………… 2. ……………………………………………………………………..

3. ………………………………………………………………………… 4. ……………………………………………………………………..

IMIĘ I NAZWISKO OPIEKUNA DRUŻYNY (nauczyciel): ……………………………………………………………………………………

SZKOŁA: ……..…

Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań: **60 minut** od zakończenia czynności organizacyjnych.
Rozwiązania muszą być wzorowo zredagowane. Redakcja rozwiązań podlega ocenie.
Nie wolno korzystać z zewnętrznych źródeł wiedzy, kalkulatorów.

Drużyna otrzymuje dwa komplety materiałów.
Po zakończeniu konkursu jeden z kompletów **jest zwracany do oceny** a drugi drużyna zostawia sobie na pamiątkę ☺.
Za każde zadanie można zdobyć **10 punktów**. Razem do zdobycia jest zatem 60 punktów.
Niniejszy arkusz zawiera **8 stron** (proszę sprawdzić, czy wszystkie strony zostały prawidłowo skopiowane).

PUNKTACJA (wypełnia recenzent)

1	2	3	4	5	6	Σ

Życzymy Wam dobrej zabawy i sukcesów w konkursie **Liga Naukowa**.
www.liganaukowa.pl

POWODZENIA !

ZADANIE **1** (na dobry początek)
Znajdź taki trójkąt, żeby każdy jego bok miał długość całkowitą oraz długość promienia opisanego na nim okręgu też była liczbą całkowitą. Uzasadnij, dlaczego wskazany przez ciebie trójkąt spełnia warunki zadania.

ROZWIĄZANIE:

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ma długość równą połowie długości jego przeciwprostokątnej.

Wystarczy więc znaleźć trójkąt prostokątny o całkowitych długościach boków i przeciwprostokątnej mającą długość parzystą.

Przykładem takiego trójkąta jest trójkąt o bokach długości 6, 8, 10.

ODPOWIEDŹ:

MIEJSCE NA BRUDNOPIS

ZADANIE **2**

Znajdź wszystkie naturalne dwucyfrowe liczby *n* dla których prawdziwe jest następujące zdanie:
"Kwadrat można rozciąć na dokładnie *n* kwadratów". Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że jeżeli kwadrat można podzielić na n kwadratów, to można go również podzielić na $n + 3$ kwadraty (wystarczy w tym celu jeden z kwadratów rozciąć na 4 mniejsze kwadraty).

Wobec tego ponieważ można rozciąć kwadrat na 1 kwadrat, to można go też rozciąć na 4, 7, 10, … kwadratów (każdą liczbę dającą resztę 1 z dzielenia przez 3).

Skoro kwadrat można rozciąć na 6 kwadratów (jeden kwadrat o boku 2 i pięć kwadracików o boku 1), to można go też rozciąć na 9, 12, 15, 18, … kwadratów (każdą liczbę podzielną przez 3 i nie mniejszą niż 6).
Skoro kwadrat można rozciąć na 8 kwadratów (jeden kwadrat o boku 3 i siedem kwadracików o boku 1), to można go też rozciąć na 11, 14, 17, … kwadratów (każdą liczbę dającą resztę 2 z dzielenia przez 3 i nie mniejszą niż 8).

Wobec tego każda dwucyfrowa liczba naturalna ma szukaną własność.

MIEJSCE NA BRUDNOPIS

ZADANIE **3**

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych, których iloczyn jest o 5 większy od ich sumy.

ROZWIĄZANIE:

Szukamy liczb całkowitych a i b spełniających równanie: $ab = (a + b) + 5$,
które można przekształcić do postaci $(a - 1)(b - 1) = 6$.

Ponieważ 6 można przestawić na cztery sposoby w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych:
$6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = (-1) \cdot (-6) = (-2) \cdot (-3)$,
więc równanie to spełniają cztery pary liczb całkowitych: 2 i 7, 3 i 4, 0 i –5, –1 i –2.

ODPOWIEDŹ:

MIEJSCE NA BRUDNOPIS

ZADANIE 4

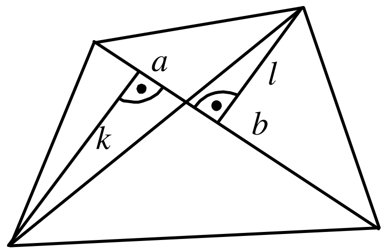
Przekątne dzielą czworokąt na cztery trójkąty. Trzy z nich mają pola równe 2, 3, 6.
Jakie może być pole czwartego trójkąta? Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:

Przyjmijmy, że punkt przecięcia przekątnych dzieli jedną z nich na odcinki długości a i b.
Oznaczmy też przez k i l odpowiednie wysokości spuszczone na tę przekątną (zaznaczone na rysunku).

Wtedy cztery trójkąty, na które przekątne podzieliły czworokąt, mają pola:
$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot l$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot l$, $S_3 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot k$, $S_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot k$.

Zauważmy, że spełniony jest warunek $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.
W takim razie jeśli przez x oznaczymy szukane pole, to spełniony musi być jeden z warunków: $2 \cdot 3 = 6 \cdot x$ lub $2 \cdot 6 = 3 \cdot x$ lub $3 \cdot 6 = 2 \cdot x$.
Zatem x jest jedną z liczb 1, 4, 9.



MIEJSCE NA BRUDNOPIS

ZADANIE **5**

W półkole wpisano dwa kwadraty (jak na rysunku).
Jeśli mniejszy kwadrat ma pole 4, to jakie jest pole większego kwadratu? Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:

Oznaczmy długość boku większego kwadratu przez $2b$, zaś promień półkola przez r.

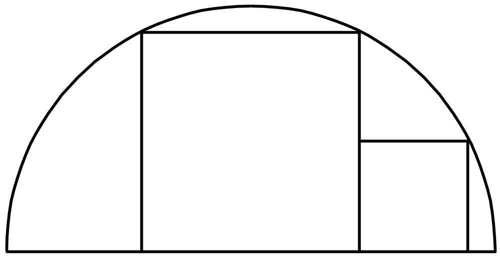
Mniejszy kwadrat ma bok długości 2.
Środek średnicy półkola oraz środek boku dużego kwadratu pokrywają się (zaznaczony punkt na rysunku).

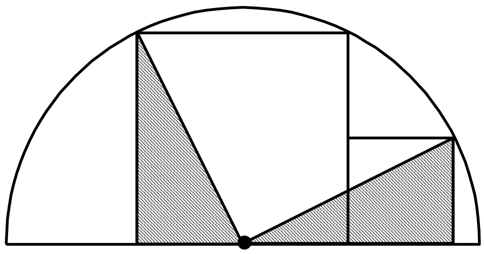
Jeśli zapiszemy twierdzenie Pitagorasa dla każdego z obu trójkątów prostokątnych, to otrzymamy:
$b^2 + (2b)^2 = r^2$ oraz $(b + 2)^2 + 2^2 = r^2$.

Porównując te dwa równania dostaniemy
$b^2 + (2b)^2 = (b + 2)^2 + 2^2$,

co po uproszczeniu przyjmie postać
$4b^2 - 4b + 1 = 9$,
czyli $(2b - 1)^2 = 3^2$,
skąd dostajemy $b = 2$.

Zatem większy kwadrat ma bok długości 4 i pole równe 16.





ODPOWIEDŹ:

MIEJSCE NA BRUDNOPIS

ZADANIE **6**

O pewnej liczbie naturalnej n wiadomo, że ma ona dokładnie 6 dzielników (dodatnich). Ile dzielników (dodatnich) może mieć liczba $2n$? Rozważ wszystkie możliwe sytuacje. Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:

Nietrudno zauważyć, że jeśli liczba n ma następujący rozkład na czynniki pierwsze:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ to różne liczby pierwsze,
zaś $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ to dodatnie liczby naturalne, to liczba jej dzielników wyraża się wzorem:

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1).$$

W takim razie liczba, która ma dokładnie 6 dzielników jest albo postaci p^5 (piąta potęga pewnej liczby pierwszej) albo $p \cdot q^2$, gdzie p i q to różne liczby pierwsze.

Mamy więc 5 możliwych sytuacji:

1) $n = p^5$ i p jest nieparzystą liczbą pierwszą – wtedy $2n = 2p^5$, więc $2n$ ma $(1 + 1) \cdot (5 + 1)=12$ dzielników.

2) $n = 2^5$ – wtedy $2n = 2^6$, więc $2n$ ma 7 dzielników.

3) $n = p \cdot q^2$ i p oraz q są nieparzystymi liczbami pierwszymi – wtedy $2n = 2p \cdot q^2$, więc $2n$ ma $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ dzielników.

4) $n = 2 \cdot q^2$ i q jest nieparzystą liczbą pierwszą – wtedy $2n = 2^2 \cdot q^2$, więc $2n$ ma $(2 + 1) \cdot (2 + 1) = 9$ dzielników.

5) $n = p \cdot 2^2$ i p jest nieparzystą liczbą pierwszą – wtedy $2n = p \cdot 2^3$, więc $2n$ ma $(1 + 1) \cdot (3 + 1) = 8$ dzielników.

MIEJSCE NA BRUDNOPIS

DESER

Jeśli zakończyliście analizę wszystkich zadań i redakcję rozwiązań przed upływem czasu możecie rozwiązać jeszcze jedno zadanie (**nie jest punktowane**):

Ile było takich lat w minionym tysiącleciu, których numer dawał resztę 3 przy dzieleniu przez 7 oraz resztę 8 przy dzieleniu przez 13?

ROZWIĄZANIE:

Szukamy takich naturalnych liczb n, które spełniają nierówność $1000 < n \leq 2000$ oraz dają resztę 3 przy dzieleniu przez 7, a resztę 8 przy dzieleniu przez 13.

Zauważmy, że liczba $m = n + 18$ daje resztę 0 zarówno przy dzieleniu przez 7, jak i przy dzieleniu przez 13.

W takim razie dzieli się ona przez 7 i przez 13, czyli dzieli się przez $7 \cdot 13 = 91$.

Zadanie sprowadza się więc do znalezienia liczby liczb naturalnych m spełniających warunek $1018 < m \leq 2018$.

Ponieważ $11 \cdot 91 = 1001$ oraz $22 \cdot 91 = 2002$, więc liczb takich jest dokładnie 11.

KONKURS
LIGA NAUKOWA

najciekawszy konkurs na Dolnym Śląsku