ORGANIZATORZY KONKURSU
Kuratorium Oświaty we Wrocławiu
Liceum Ogólnokształcące Nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu
Dolnośląskie Stowarzyszenie Na Rzecz Uzdolnionych
al. Brücknera 10, 51 – 410 WROCŁAW,
tel. + 48 71 324 69 25, + 48 71 324 69 00, fax. + 48 71 324 69 01

HONOROWY PATRONAT:
Wiceprezydent Miasta Wrocławia

KONKURS **LIGA NAUKOWA**
Dolnośląski Konkurs Gimnazjalistów

FINAŁ MATEMATYCZNY

KLASYFIKACJA DRUŻYNOWA I INDYWIDUALNA

5 marca 2008, godz. 12:30 (indywidualne) 13:00 (drużynowe),
część konkursu rozgrywana w siedzibie Liceum Ogólnokształcącego Nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

rozwiązania zadań indywidualnych i drużynowych

Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań: razem **60 minut** (30 min. indywidualnie i 30 min. drużynowo).
Za każde zadanie można zdobyć **200 punktów**. Razem do zdobycia przez drużynę **1200** punktów.

ZADANIE **1 indywidualne** (do wyboru)
Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych zawsze jest podzielny przez 24.

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Ponieważ 3 i 8 są liczbami względnie pierwszymi, więc prawdziwa jest następująca cecha podzielności: „liczba naturalna dzieli się przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się jednocześnie przez 3 i przez 8”. Musimy więc wykazać podzielność iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych przez 3 i przez 8.
Zauważmy, że pośród liczb naturalnych co druga liczba jest parzysta, co trzecia jest podzielna przez 3, a co czwarta jest podzielna przez 4. W takim razie pośród czterech kolejnych liczb naturalnych musi być przynajmniej jedna podzielna przez 3, więc ich iloczyn będzie podzielny przez 3.
Podobnie widzimy, że wśród czterech kolejnych liczb naturalnych są dwie liczby parzyste i jedna podzielna przez 4 (oczywiście będzie to jedna z tych liczb parzystych).

Ponieważ iloczyn liczby parzystej i liczby podzielnej przez 4 jest podzielny przez 8, więc iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych musi być podzielny przez 8.

ODPOWIEDŹ:

ZADANIE **2 indywidualne** (do wyboru)

Autokarem jechało 49 osób, których średni wiek wynosił dokładnie 43 lata. Gdy z autobusu wysiadł najstarszy pasażer, średni wiek spadł do 42 lat. W jakim wieku był ten pasażer?

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Łączny wiek osób jadących autobusem pierwotnie wynosił 49 · 43 lata, a po tym jak z autobusu wysiadł staruszek – 48 · 42 lata. Wiek staruszka to zatem:

$49 \cdot 43 - 48 \cdot 42 = 49 + 49 \cdot 42 - 48 \cdot 42 = 49 + (49 - 48) \cdot 42 = 49 + 42 = 91$ lat.

ODPOWIEDŹ:

ZADANIE **3 indywidualne** (do wyboru)

Czy istnieje liczba będąca kwadratem liczby naturalnej, w której zapisie dziesiętnym nie ma innych cyfr niż 2 i 3? Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Każdą liczbę naturalną n możemy zapisać w postaci $10a + b$, gdzie b jest cyfrą jedności liczby n, zaś a jest pewną liczbą naturalną (być może większą niż 9). W takim razie:

$n^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 10(10a + 2b) + b^2$, czyli liczba n^2 ma taką samą cyfrę jedności co liczba b^2. Ponieważ b^2 jest jedną z liczb $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, ..., 9^2$, więc po prostych obliczeniach widzimy, że jej cyfrą jedności jest 0, 1, 4, 5, 6 lub 9. Zatem kwadrat liczby naturalnej nie może mieć cyfry jedności ani 2 ani 3, co daje negatywną odpowiedź na pytanie zawarte w treści zadania.

ZADANIE **4 indywidualne** (do wyboru)

Udowodnij, że wśród 12 kolejnych liczb naturalnych większych od 3 są co najwyżej cztery liczby pierwsze.

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Jeśli rozważymy reszty z dzielenia przez 12 dwunastu kolejnych liczb naturalnych, to każda z możliwych reszt: 0, 1, 2, 3, ..., 11 wystąpi dokładnie raz. Ponieważ wszystkie nasze liczby są większe niż 3, więc te z nich które są podzielne przez 2 lub przez 3 są liczbami złożonymi. W takim razie te liczby, które dają resztę 0, 2, 4, 6, 8 lub 10 są złożone (dzielą się przez 2) i te, które dają resztę 3 lub 9 są złożone (dzielą się przez 3). Zatem co najwyżej cztery pozostałe liczby są pierwsze.

ZADANIE **1 drużynowe**

Trzy przystające okręgi o promieniu długości 1 są parami styczne zewnętrznie. Jaką długość może mieć promień czwartego okręgu, stycznego zewnętrznie do każdego z tych trzech?

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Środki tych trzech okręgów są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości 2, zaś środek czwartego okręgu jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie (bo jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta – odległość ta wynosi dokładnie 1 + *r*, gdzie *r* to promień czwartego okręgu). Ponieważ wiemy, że wysokość trójkąta równobocznego o boku 2 ma długość $\sqrt{3}$, a promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym to $\frac{2}{3}$ wysokości, więc dostajemy równanie:

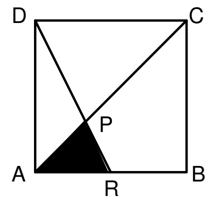
$1+r=\frac{2}{3}\sqrt{3}$, czyli $r=\frac{2}{3}\sqrt{3}-1$.

ZADANIE **2 drużynowe**

W kwadracie *ABCD* o boku długości 6 cm punkt *R* jest środkiem boku *AB*. Jakie jest pole trójkąta *APR*?

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Oznaczmy pole czarnego trójkąta przez *x*. Z twierdzenia Talesa *PR : PD = AR : CD = 1 : 2*, więc pole trójkąta *APD* jest równe *2x* (trójkąty *APR* i *APD* mają wspólną wysokość i podstawy mające stosunek 1 : 2). Ponadto trójkąty *PDC* i *APR* są podobne w skali 2, więc pole trójkąta *PDC* jest równe *4x*. W takim razie pole trójkąta *ACD* jest równe *2x+4x=6x* i jest to połowa pola kwadratu, czyli 18 cm^2.
Wobec tego pole *x* jest równe 3 cm^2.



ODPOWIEDŹ:

DESER

Jeśli zakończyliście analizę wszystkich zadań i redakcję rozwiązań przed upływem czasu możecie rozwiązać jeszcze jedno zadanie (**nie jest punktowane**):

Czy z kwadratu o boku długości 1 cm można wyciąć 2006 kół, dla których suma długości promieni jest równa 2006 cm? Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Kwadrat o boku długości 1 cm można rozciąć na 100 000 000 kwadracików o boku 0,0001 cm każdy. Z każdego takiego kwadracika można wyciąć koło o promieniu długości 0,00005 cm. Łączna suma promieni wyciętych kół będzie wtedy równa 5 000 cm. Spośród wyciętych w ten sposób kółek możemy wybrać tyle, żeby suma ich promieni była równa dokładnie 2006 cm.

WROCŁAW

KONKURS
LIGA NAUKOWA