

KONKURS LIGA NAUKOWA

Dolnośląski Konkurs Gimnazjalistów

FINAŁ MATEMATYCZNY

KLASYFIKACJA DRUŻYNOWA I INDYWIDUALNA

25 lutego 2010, godz. 13:00 (indywidualne) 14:30 (drużynowe),
część konkursu rozgrywana w siedzibie Liceum Ogólnokształcącego Nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

■ rozwiązania zadań indywidualnych i drużynowych

Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań: razem **135 minut** (90 min. indywidualnie i 45 min. drużynowo).
Za każde zadanie można zdobyć **200 punktów**. Razem do zdobycia przez drużynę **1200 punktów**.

ZADANIE **1** indywidualne

Pewna liczba ma iloczyn cyfr równy sumie jej cyfr, która wynosi 350. Ile cyfr ma ta liczba?

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Ponieważ $350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$,
więc jedynymi liczbami o iloczynie cyfr 350 są liczby, których cyframi są: jedna dwójka, dwie piątki,
jedna siódemka i dowolna liczba jedynek. Suma cyfr takiej liczby,
to $2 + 5 + 5 + 7 +$ liczba jedynek = $19 +$ liczba jedynek. Skoro suma cyfr również wynosi 350, to liczba
jedynek jest równa 331, a szukana liczba ma $331 + 4 = 335$ cyfr.

ODPOWIEDZ:

ZADANIE 2 indywidualne

Ile maksymalnie liczb pierwszych może się znaleźć pośród 12 kolejnych liczb naturalnych większych od 3? Podaj przykład realizujący tę liczbę i uzasadnij, że tej liczby nie można zwiększyć.

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Weźmy 12 kolejnych liczb naturalnych i popatrzmy na ich reszty z dzielenia przez 12. Wśród nich każda z reszt 0, 1, 2, ..., 11 wystąpi dokładnie jeden raz. Liczba pierwsza większa od 3 nie może dawać przy dzieleniu przez 12 reszty 0, 2, 4, 6, 8 ani 10 (bo byłaby parzysta), ani reszty 3 lub 9 (bo dzieliłaby się przez 3). Wśród owych 12 kolejnych liczb naturalnych mogą więc być najwyżej 4 liczby pierwsze. Przykład takiej sytuacji: wśród liczb naturalnych od 4 do 15 są dokładnie cztery liczby pierwsze: 5, 7, 11, 13.

ODPOWIEDZ:

ZADANIE 3 indywidualne

Dla danego sześcianu istnieje 6 płaszczyzn, które zawierają dwie krawędzie sześcianu i przechodzą przez jego środek. Jeśli rozetniemy sześcian wszystkimi sześcioma płaszczyznami, to ile części otrzymamy?

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Nietrudno zauważyć, że każda ściana sześcianu zostanie rozcięta na cztery trójkąty i że każde dwa z otrzymanych w ten sposób $6 \cdot 4 = 24$ trójkątów leżą w różnych spośród otrzymanych części. Sześcian zostanie podzielony na dokładnie 24 czworoscianiki – każdy z nich będzie miał jako wierzchołki: środek sześcianu, środek pewnej ściany sześcianu i dwa sąsiednie wierzchołki tej ściany.

ZADANIE 4 indywidualne

Czy liczba $234\ 358 \cdot 234\ 359$ jest kwadratem liczby naturalnej? Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Liczba ta jest większa niż $234\ 358^2$, ale mniejsza niż $234\ 359^2$, czyli znajduje się pomiędzy kwadratami dwóch **kolejnych** liczb naturalnych. Sama nie może więc być kwadratem.

ZADANIE 1 drużynowe

Ile może być takich miesięcy w roku, w których wypada 5 piątków?

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Rok to 365 lub 366 dni, czyli 52 tygodnie i 1 lub 2 dni. Wobec tego w ciągu roku wypadają 52 lub 53 piątki. W każdym miesiącu wypada 4 lub 5 piątków. Zliczając pierwsze cztery piątki z każdego miesiąca otrzymujemy $12 \cdot 4 = 48$, w ciągu roku będzie więc 4 lub 5 „piątych piątków miesiąca” (52 lub 53 minus 48). Znaczy to, że jest 4 lub 5 miesięcy, w których wypada 5 piątków.

ZADANIE 2 drużynowe

Czy istnieje naturalna potęga dwójki, która (w zapisie dziesiętnym) ma dokładnie 100 cyfr i jej pierwszą (od lewej) cyfrą jest jedynka? Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Oznaczmy $A = 100\dots 0$ (99 zer) oraz $B = 200\dots 0$ (99 zer). Niech 2^n będzie największą naturalną potęgą dwójki nie przekraczającą A . Ponieważ A nie jest potęgą dwójki, więc mamy $2^n < A$. Wobec tego $2^{n+1} < 2A = B$, a ponadto $2^{n+1} > A$ (bo 2^n to największa potęga dwójki nie przekraczająca A). Liczba 2^{n+1} leży więc pomiędzy A i B , czyli ma dokładnie 100 cyfr i jedynkę na początku.

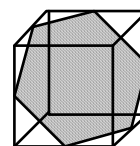
DESER

Jeśli zakończyliście analizę wszystkich zadań i redakcję rozwiązań przed upływem czasu możecie rozwiązać jeszcze jedno zadanie (**nie jest punktowane**):

Czy można rozciąć sześcián płaszczyzną tak, by przekrój miał kształt sześciokąta foremnego?

ROZWIĄZANIE:

ROZWIĄZANIE: Tak, należy poprowadzić płaszczyznę przez środki sześciu krawędzi sześcianu, jak na rysunku.



KONKURS
LIGA NAUKOWA